E.N.S.I. 1985 Option M

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — Le sujet se compose de 5 parties qui ne sont pas indépendantes. On peut traiter une question en admettant les résultats énoncés dans les questions précédentes.

Dans tout le problème, on considère des fonctions à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe C^p, p entier $\geqslant 0$.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant p$ on désigne la valeur en x de la k-ième dérivée de f par la notation :

$$\frac{d^k}{dx^k}[f(x)] \text{ avec la convention que } \frac{d^0}{dx^0}[f(x)] = f(x)$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère l'équation différentielle noté $\mathcal{D}_n$:

$$(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - n(n+1)\, y = 0$$

dont les solutions sur un intervalle de $\mathbb{R}$, sont les fonctions f de classe C^2 sur cet intervalle et telles que :

$$(x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2}[f(x)] + 2x\frac{d}{dx}[f(x)] - n(n+1) f(x) = 0$$

en tout point x de l'intervalle.

I

Soit $P(x)$ un polynôme non identiquement nul, de degré p entier $\geqslant 0$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on lui associe le polynôme D_nP défini par :

$$(D_nP)(x) = (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2}[P(x)] + 2x\frac{d}{dx}[P(x)] - n(n+1)\, P(x)$$

1° Vérifier que le polynôme D_nP est de degré $\leqslant p$ en distinguant les trois cas $p = 0$, $p = 1$, $p \geqslant 2$.

Montrer que :

— lorsque $p = 0$, D_nP est identiquement nul si et seulement si $n = 0$.

— lorsque $p \geqslant 1$, le degré du polynôme D_nP est strictement inférieur à p si et seulement si $p = n$.

En déduire que si un polynôme P non identiquement nul, est solution de $\mathcal{D}_n$, sur $\mathbb{R}$ son degré est nécessairement égal à n.

2° Déterminer tous les polynômes qui sont solutions de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathbb{R}$, dans chacun des cas particuliers $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

3° Pour tout polynôme P de degré $n \geqslant 2$, expliciter les coefficients du polynôme :

$$(D_n P)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} b_k \, x^k$$

en fonction des coefficients de P.

4° Soit $a \neq 0$ un nombre réel fixé. Montrer qu'il existe un unique polynôme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \, x^k$$

solution de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathbb{R}$, et tel que $a_n = a$.

Pour cela on utilisera la question 3, en exprimant que $D_n P$ est identiquement nul. On montrera que :

i. $a_{n-1} = 0$.

ii. P est un polynôme pair lorsque n est pair, et est un polynôme impair lorsque n est impair.

iii. Les coefficients a_k sont entièrement déterminés par récurrence à partir du terme $a_n = a$.

Montrer que a_k est de la forme $a_k = r_k . a$ où r_k est un nombre rationnel.

(On ne demande pas l'expression explicite des nombres r_k en fonction de k).

II

Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$$

1° Montrer que $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x\, U_n(x)\right] = x \dfrac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right] + n \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[U_n(x)\right]$.

En déduire que :

$$(x^2 - 1) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[U_n(x)\right] = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[U_{n+1}(x)\right] - 2(n+1) \frac{d^n}{dx^n}\left[x\, U_n(x)\right] + n(n+1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[U_n(x)\right]$$

2° i. En explicitant U_n et U_{n+1} montrer que $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[U_{n+1}(x)\right] = 2(n+1) \dfrac{d}{dx}\left[x\, U_n(x)\right]$

en déduire que :

$$(x^2 - 1) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[U_n(x)\right] = n(n+1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[U_n(x)\right]$$

ii. Montrer que le polynôme $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right]$ est solution de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathbb{R}$.

3° i. Montrer directement, sans utiliser la partie I, que le polynôme P_n est de degré n et préciser son terme de plus haut degré.

ii. Montrer directement que P_n est un polynôme pair lorsque n est pair, et un polynôme impair lorsque n est impair.

iii. Soit $a \neq 0$ un nombre réel fixé. Quel est le polynôme solution de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathbb{R}$, dont le terme de plus haut degré est ax^n ? Donner son expression à l'aide de P_n.

III

Les notations sont celles de I et II.

1° L'entier $n \geqslant 1$ étant fixé, montrer que pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, le polynôme $\frac{d^k}{dx^k}[U_n(x)]$ s'annule pour les valeurs $+1$ et -1.

2° Soit f une fonction de classe C^n, $n \geqslant 0$, sur l'intervalle $[-1, +1]$. On pose :

$$c_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot P_n(x)\, dx$$

Montrer que pour $n \geqslant 1$: $c_n(f) = -\int_{-1}^{+1} \left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right) \cdot \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[U_n(x)]\right) dx$

et en réitérant convenablement :

$$c_n(f) = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]\right) \cdot U_n(x)\, dx.$$

3° En déduire que si m et n sont deux entiers tel que $0 \leqslant m < n$ on a :

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = 0.$$

4° On pose : $I_n = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2\, dx$

i. Montrer que lorsque $n \geqslant 1$: $I_n = -\int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[U_n(x)]\right) \cdot \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[U_n(x)]\right) dx$

puis :

$$I_n = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[U_n(x)]\right) \cdot U_n(x)\, dx$$

ii. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$:

$$I_n = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n\, dx.$$

5° On pose $J_n = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n\, dx$

i. Montrer que pour $n \geqslant 1$:

$$J_n = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{+1} (1 + x)^{n+1} (1 - x)^{n-1}\, dx$$

ii. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$:

$$J_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (1 + x)^{2n}\, dx$$

En déduire que $I_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)}\, 2^{2n+1}$

IV

Les notations sont celles des parties précédentes.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1, +1]$, on pose pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{I_k} c_k(f) = \frac{1}{I_k} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_k(x)\, dx .$$

1° Lorsque f est un polynôme fixé de degré $\leqslant n$, montrer qu'il existe une décomposition unique de f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k P_k(x)$$

et exprimer a_k à l'aide de $\hat{f}(k)$.

Quelle est la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]^2\, dx, \text{ exprimée à l'aide des nombres } \hat{f}(k) ?$$

2° Soit f une fonction fixée quelconque, continue sur $[-1, +1]$.

Soit pour tout entier $k \geqslant 0$, un nombre réel a_k fixé.

On considère pour tout entier $n \geqslant 0$, la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k P_k(x) \text{ et l'intégrale}$$

$$\Delta_n = \int_{-1}^{+1} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx .$$

i. En développant cette expression, montrer que f étant fixé, le *minimum* de Δ_n est obtenu en choisissant $a_k = \hat{f}(k)$ pour toutes les valeurs $0 \leqslant k \leqslant n$.

Quel est alors ce minimum?

ii. En déduire que la série numérique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [\hat{f}(k)]^2 I_k$$

est convergente, et donner une majoration de sa somme.

V

On considère l'espace affine Euclidien E de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit Ω le complémentaire dans E de la droite vectorielle définie par $x = y = 0$.

A tout point M de Ω de coordonnées cartésiennes (x, y, z) on associe les coordonnées sphériques habituelles (r, θ, φ) où $r > 0$ est la longueur OM, θ est la longitude $0 \leqslant \theta < 2\pi$, et φ est la colatitude $0 < \varphi < \pi$. Le changement de variable est défini par les équations :

$$x = r \sin \varphi . \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi . \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi .$$

Pour toute fonction à valeurs réelles $u(x, y, z)$ définie dans Ω et de classe C^2, on pose :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

On admettra que l'expression de Δu en coordonnées sphériques est :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right] + \frac{1}{\sin \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right] + \frac{1}{\sin^2 \varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right]$$

où $U(r, \theta, \varphi)$ est l'expression en coordonnées sphériques de $u(x, y, z)$.

On cherche les solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

qui sont de la forme $U(r, \theta, \varphi) = f(r).g(\theta, \varphi)$ où f et g sont des fonctions de classe C^2 qui ne s'annulent pas.

1° Montrer que f et g vérifient les équations, où a est une constante quelconque :

(A) $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - af = 0$

(B) $\frac{1}{\sin \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + ag = 0$

2° Résoudre l'équation différentielle (A) lorsque $a > -\frac{1}{4}$, en cherchant les solutions sous la forme $f(r) = F(\text{Log } r)$

3° On choisit une constante de la forme $a = n(n+1)$ où n est un entier $\geqslant 0$ fixé.

On cherche les solutions de (B) qui sont de la forme :

$$g(\theta, \varphi) = h(\cos \varphi)$$

où h est de classe C^2.

Montrer que h vérifie une équation différentielle du second ordre que l'on reconnaîtra.

Quelle famille explicite de solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, peut-on ainsi mettre en évidence ?